

## خازن

اگر دو هادی را در نظریه بگیریم که در یک عایق همگن قرار داشته باشند و هادی اول دارای بار مثبت  $Q$  و هادی دوم حامل بار مساوی با علامت منفی باشد. در این سیستم بار دیگری وجود نداشته و بار کلی صفر باشد، یک خازن خواهیم داشت. بارها روی سطح هادی‌ها به صورت چگالی بار سطحی مستقر می‌شوند و خطوط میدان بر هادی‌ها عمود خواهد بود و بنابراین سطح هادی‌ها هم پتانسیل خواهد بود. شار الکتریکی از هادی اول شروع و به هادی دوم ختم می‌شود. اگر اختلاف پتانسیل بین هادی‌ها را  $V_0$  فرض کنیم، ظرفیت این سیستم طبق تعریف برابر است با اندازه‌ی بار کل هریک از هادی‌ها به اختلاف پتانسیل بین آن دو:

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

به بیان کلی‌تر، می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{L}}$$

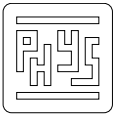
ظرفیت، مستقل از پتانسیل و بار کل است، زیرا خارج قسمت بار بر اختلاف پتانسیل مقداری ثابت است. اگر چگالی بار  $N$  برابر شود، بر طبق قانون گاوس، شدت میدان الکتریکی نیز  $N$  برابر می‌شود و در نتیجه اختلاف پتانسیل نیز  $N$  برابر خواهد شد. ظرفیت فقط تابع ابعاد فیزیکی سیستم هادی‌ها و ضریب نفوذپذیری عایق همگن است.

ظرفیت با واحد فاراد ( $F$ ) اندازه‌گیری می‌شود. یک فاراد طبق تعریف برابر یک کولمب بر ولت است. واحدهای متداول ظرفیت، میکروفاراد ( $\mu F$ ) و پیکوفاراد ( $pF$ ) هستند.

### ظرفیت خازن با صفحات موازی

سیستمی را در نظر بگیرید که متشکل از دو هادی موازی مسطح یکسان و نامحدود، که فاصله‌ی بین آن‌ها  $d$  باشد. با انتخاب هادی پایینی در صفحه  $z=0$  و هادی بالایی در صفحه‌ی  $z=d$ ، وجود چگالی بار سطحی یکنواخت  $\pm \rho_s$  بر روی هادی‌ها، میدان یکنواختی را در میدان سطوح هادی خواهیم داشت.

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{k}$$



که نفوذپذیری عایق همگن  $\epsilon$  است و:

$$\vec{D} = \rho_s \hat{k}$$

بار روی صفحه‌ی پایین مثبت است، زیرا  $D$  به سمت بالا است و مقدار مولفه‌ی عمومی  $D$ :

$$D_N = D_z = \rho_s$$

برابر با چگالی بار سطح است. در صفحه‌ی بالایی:

$$D_N = -D_z$$

و بار سطحی، منفی بار سطحی روی صفحه‌ی پایین است. اختلاف پتانسیل بین صفحات بالایی و پایینی برابر است با:

$$V_0 = - \int_{up}^{down} \vec{E} \cdot d\vec{L} = - \int_d^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

از آنجا که صفحه‌ها را بی‌نهایت فرض کرده بودیم، بار کلی روی هر صفحه هادی بی‌نهایت است و ظرفیت خازن بی‌نهایت است. حال

فرض می‌کنیم که مساحت صفحه محدود و مسای  $S$  است و فاصله‌ی بین صفحات نسبت به ابعاد صفحات خیلی کوچکتر است. با این

شرط در نقاط دور از لبه‌ها، میدان و توزیع بار یکنواخت خواهد بود و اثر لبه‌ها در ظرفیت ناچیز و قابل چشم‌پوشی می‌شود.

به همین دلیل می‌توانیم مقدار بار را ته‌دست آوریم:

$$Q = \rho_s S$$

در نهایت با در نظر گرفت پتانسیل بین بارها و تعریف ظرفیت خواهیم داشت:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \epsilon \frac{S}{d}$$

این رابطه، ظرفیت خازن مسطح بی‌نهایت بزرگ با مساحت  $S$  است.

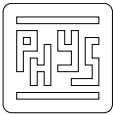
## مثال

ظرفیت خازنی با عایق میکا ( $\epsilon_r = 6$ )، مساحت صفحات  $10 \text{ cm}^2$ ، فاصله‌ی صفحات  $0.01 \text{ cm}$  را حساب کنید.

حل:

$$S = 10 \text{ cm}^2 = 10 \times 10^{-4}$$

$$d = 0.01 \text{ cm} = 0.01 \times 10^{-2} = 1.0 \times 10^{-4}$$



$$C = 6 \times 8.854 \times 10^{-12} \frac{10 \times 10^{-4}}{1.0 \times 10^{-4}} = 531 \times 10^{-12} = 531 \text{ pF}$$

انرژی ذخیره شده کلی در خازن

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_s^2}{\epsilon^2} dz dS = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{\rho_s S}{d} \frac{\rho_s^2 d^2}{\epsilon^2}$$

یا:

$$W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

با ثابت نگه داشتن اختلاف پتانسیل، اگر عایقی که بکار می‌بریم ثابت دی‌الکتریک بزرگ‌تری داشته باشد انرژی ذخیره شده در خازن افزایش می‌یابد.

## تمرینات

۱- نفوذپذیری نسبی ماده‌ی دی‌الکتریک موجود در یک خازن تخت را در شرایط زیر به‌دست آورید: (الف)  $S = 0.12 \text{ m}^2$ ،  $V_0 = 12 \text{ V}$ ،  $d = 80 \mu\text{m}$  و خازن دارای  $1 \mu\text{J}$  انرژی باشد؛ (ب) چگالی انرژی ذخیره شده  $100 \text{ J/m}^3$ ،  $V_0 = 200 \text{ V}$ ،  $d = 45 \mu\text{m}$  باشد؛ (ج)  $E = 200 \text{ kV/m}$ ،  $\rho_s = 20 \mu\text{C/m}^2$  و  $d = 100 \mu\text{m}$  باشد.

۲- ظرفیت خازن کروی با فرض اینکه شعاع کره‌ی داخلی  $a$  و شعاع کره‌ی خارجی  $b$  باشد عایق مابین آن‌ها دارای ضریب دی‌الکتریک  $\epsilon_r$  باشد را به‌دست آورید.

۳- ظرفیت خازن استوانه‌ای با فرض اینکه شعاع استوانه‌ی داخلی  $a$  و شعاع استوانه‌ی خارجی  $b$  و ارتفاع استوانه  $L$  بوده و عایق مابین آن‌ها دارای ضریب دی‌الکتریک  $\epsilon_r$  باشد را محاسبه نمایید.