

حرکت شناسی دوبعدی

مکان: روش عمومی برای مکان یابی یک ذره استفاده از بردار مکان \vec{r} است. که آن برداری است که از یک نقطه مرجع (مبدأ مختصات) تا ذره امتداد می‌یابد.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

جابجایی: وقتی ذره‌ای حرکت کند بردار مکان آن نسبت به مبدأ تغییر خواهد کرد که تغییرات بردار مکان، برداری جابجایی است.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

سرعت متوسط: اگر ذره‌ای در بازه زمانی Δt ، جابجایی $\Delta \vec{r}$ را انجام دهد، آنگاه سرعت متوسط آن عبارت است از

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

سرعت لحظه‌ای: هر ذره‌ای که در هر لحظه‌ی معین دارای سرعت لحظه‌ای $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ ، که دارای دو مولفه سرعت در جهت محور X ها و سرعت در جهت محور Y ها می‌باشد.

شتاب متوسط: وقتی ذره‌ای در بازه‌ی زمانی Δt از سرعت لحظه‌ای \vec{v}_1 به سرعت لحظه‌ای \vec{v}_2 تغییر می‌کند، شتاب متوسط \vec{a}_{avg} آن عبارت است از

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

شتاب لحظه‌ای: اگر بازه زمانی اندازه‌گیری مدت زمان به سمت صفر میل دهیم، شتاب لحظه بدست خواهد آمد که مانند سرعت دارای دو مولفه a_x و a_y به صورت $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ می‌باشد.

حل مسائل حرکت دو بعدی

یک حرکت دو بعدی در واقع دو حرکت بعدی در جهت‌های عمود برهم X و Y می‌باشد. از این رو در حل چنین مسائلی می‌توانیم با تجزیه مولفه‌ای، یک حرکت دو بعدی را به دو حرکت یک بعدی تبدیل نماییم. در حل این دو حرکت مانند روش‌های یک بعدی به دو حالت خاص حرکت با سرعت ثابت و حرکت با شتاب ثابت خواهیم رسید. تنها کمیت رابط بین این دو حرکت زمان می‌باشد. a_y, v_y, x, v_x و a_x, v_x, y, v_y و t کمیت‌هایی هستند که باید محاسبه شوند.

حرکت سقوط آزاد

حرکت سقوط آزاد در واقع یک حرکت با شتاب ثابت در جهت محور Y ها است پس فقط معادلات برای این محور خواهد بود و هیچ حرکت در راستای محور X نخواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_y &= g = 9.8 \text{ m/s}^2 \\ v_y &= gt \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

نکته: انتخاب علامت شتاب: همیشه برای انتخاب علامت شتاب (شتاب گرانشی g) باید به جهت شتاب و محور Y دستگاه مختصات توجه کنیم، اگر هر دو در یک جهت باشند علامت شتاب مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود. در مثال بالا جهت دستگاه مختصات به سمت پایین و جهت شتاب به سمت پایین بود بنابراین شتاب مثبت انتخاب شده است.

حرکت پرتابی به سمت بالا

اگر پرتابی به سمت بالا با سرعت اولیه v_0 و از ارتفاع y_0 صورت گیرد، هیچ حرکتی در محور x ها نخواهیم داشت و معادلات حرکت به شکل زیر خواهد بود. که علامت شتاب به علت هم جهت نبودن شتاب و محور y ها منفی انتخاب شده است.

$$\begin{aligned} a_y &= -g \\ v_y &= -gt + v_{y0} \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + y_0 \end{aligned}$$

حرکت پرتابی

حرکت پرتابی حرکتی می‌باشد که با سرعت اولیه v_0 و زاویه θ_0 نسبت به محور افقی شروع می‌شود. در این نوع حرکت در جهت راستای محور x ها یک حرکت با سرعت ثابت و در جهت محور y ها یک حرکت پرتابی به سمت بالا وجود دارد. که می‌توانیم هر کدام را به شکل مستقل محاسبه کنیم. ولی چون در حرکت در جهت محور y ها به شکل پرتابی به صورت رفت و برگشت و در نهایت برخورد به زمین و توقف خواهد بود زمان این رفت و برگشت، زمانی خواهد بود که ذره فرصت دارد در جهت محور x ها حرکت با سرعت ثابت داشته باشد، بنابراین برد نهایی به زمانی رفت و برگشت حرکت پرتابی وابسته خواهد بود. بنابراین برای حل این مسائل ابتدا سرعت اولیه را به مولفه‌هایش تجزیه کرده و معادلات حرکت را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \sin \theta_0 \\ v_{0x} &= v_0 \cos \theta_0 \end{aligned}$$

معادلات در راستای محور y

$$\begin{aligned} a_y &= -g \\ v_y &= -gt + v_0 \sin \theta_0 \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 t + y_0 \\ v^2 - v_{0y}^2 &= -2g(y - y_0) \end{aligned}$$

معادلات در راستای محور x

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ v_x &= v_0 \cos \theta_0 \\ x &= v_0 \cos \theta_0 t + x_0 \end{aligned}$$

زمان پرواز: چون حرکت به صورت رفت و برگشت است زمان پرواز کل دارای ضریب ۲ است. پس زمان یک رفت یا یک برگشت نصف این مدت خواهد بود.

$$T = 2 \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

برد افقی: حداکثر مسافت افقی که یک پرتابه در راستای محور x ها طی می‌نماید.

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

مثالها

مثال ۱: برای تخمین عمق یک چاه سنگی کوچک را از دهانه چاه آزادانه راه می‌سازیم. صدای برخورد سنگ با ته چاه بعد از ۳ ثانیه شنیده می‌شود. عمق تقریبی این چاه و سرعت برخورد سنگ با چاه را محاسبه نمایید.

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} 9.8 3^2 = \underline{44 m}$$

$$v_y = g t + v_0 = 9.8 \times 3 = 29 m/s$$

مثال ۲: تویی به سرعت اولیه $4.5 m/s$ به سمت بالا پرتاب می‌شود، حداکثر ارتفاع و مدت زمان پرواز (رفت و برگشت) توپ را محاسبه نمایید.

$$v_y = -g t + v_0$$

$$0 = -9.8 t + 4.5$$

$$t = 0.46 s$$

$$T = 2t = 2 \times 0.46 = \underline{0.92 s}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 = -\frac{1}{2} 9.8 \times 0.46^2 + 4.5 \times 0.46 = \underline{1.0 m}$$

مثال ۳: پرنده‌ای که در ارتفاع ۴۰ متری از سمت زمین در حال پرواز به سرعت $5.0 m/s$ می‌باشد، سنگی کوچک را از منقار خود رها می‌سازد. این سنگ بعد از چه مدت و در چه فاصله‌ای با زمین برخورد می‌کند؟

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$40 = \frac{1}{2} 9.8 t^2$$

$$t = \underline{2.8 s}$$

$$x = v_0 t = 5.0 \times 2.8 = \underline{14 m}$$

مثال ۴: جعبه‌ای کوچک که با سرعت $2.5 m/s$ روی میزی بدون اصطکاک به ارتفاع $1.2 m$ در حال سر خوردن است که از لبه آن به سمت بیرون پرتاب می‌شود، این جعبه در چه فاصله از لبه میز به زمین برخورد می‌کند؟

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

$$1.2 = \frac{1}{2} 9.8 t^2$$

$$t = 0.5 s$$

$$x = v_0 t = 2.5 \times 0.5 = \underline{1.2 m}$$

مثال ۵: پرتابه‌ای با سرعت اولیه $6.0 m/s$ و زاویه 30° نسبت به افق پرتاب می‌شود، مدت زمان پرواز و حداکثر برد این پرتابه را محاسبه نمایید.

$$T = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g} = 2 \frac{6.0 \sin 30}{9.8} = \underline{0.61 s}$$

$$R = \frac{2 v_0^2}{g} \sin 2\theta = \frac{2 \times 6.0^2}{9.8} \sin 60 = \underline{6.4 m}$$