۳-۱ فیزیک چیست؟

فیزیک علمی است که با کمیتهای بسیار زیادی که هم اندازه و هم جهت دارند سروکار دارد و برای توصیف چنین کمیتهایی به زبان ریاضی ویژه‌ای- زبان بردارها- نیاز داریم. این زبان همچنین در مهندسی، علوم دیگر، و حتی گفتگوهای روزمره به کار گرفته می‌شود. وقتی که شما آدرس محلی را به این ترتیب می‌دهید که: «پنج ساختمان در این خیابان به جلو بروید و سپس به سمت چپ بپیچید» از زبان بردارها استفاده کرده‌اید. در واقع، هر نوع جهت‌یابی بر بردارها مبتنی است، ولی فیزیک و مهندسی برای توصیف پدیده‌هایی مثل چرخش و نیروهای مغناطیسی نیز به روشهای ویژه‌ای از بردارها نیاز دارند، که در فصلهای بعد به آنها خواهیم پرداخت. در این فصل، به زبان مقدماتی بردارها می‌پردازیم.

بازنگری و خلاصهٔ درس

نرده‌ایهای و بردارها *نرده‌ایها*، مانند دما، فقط دارای اندازه‌اند. آنها با یک عدد و یک یکا (مثلاً $10°C$) مشخص می‌شوند و از قاعده‌های حساب و جبرمعمولی پیروی می‌کنند. *بردارها*، مانند جابه‌جایی، هم دارای اندازه و هم جهت هستند (مثلاً $5m$، رو به شمال) و از قاعده‌های جبر برداری پیروی می‌کنند.

جمع بردارها به روش هندسی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را می‌توان با رسم آنها در یک مقیاس مشترک و قراردادن ابتدای یکی بر انتهای دیگری به طور هندسی با هم جمع کرد. برداری که ابتدای بردار اولی را به انتهای بردار دوم وصل می‌کند بردار مجموع $\vec{s}$ است. برای تفریق $\vec{b}$ از $\vec{a}$، جهت $\vec{b}$ را وارون می‌کنیم تا $-\vec{b}$ به دست آید؛ آنگاه $-\vec{b}$ را با $\vec{a}$ جمع می‌کنیم. جمع برداری جابه‌جایی‌پذیر است و از قانون توزیع‌پذیری پیروی می‌کند.

مؤلفه‌های یک بردار *مؤلفه‌های* (نرده‌ای) a_x و a_y هر بردار دو بعدی $\vec{a}$ با رسم خطهای عمود از سر $\vec{a}$ بر محورهای مختصات به دست می‌آیند. این مؤلفه‌ها چنین داده می‌شوند

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{و} \quad a_y = a\sin\theta \qquad (۳-۵)$$

که در آن θ زاویهٔ بین جهت مثبت محور x و جهت $\vec{a}$ است. علامت جبری یک مؤلفه، معرف جهت آن در امتداد محور مربوط به آن است. با معلوم بودن مؤلفه‌ها، بزرگی و سمتگیری بردار $\vec{a}$ از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \qquad (۳-۶)$$

نماد بردار- یکه بزرگی *بردارهای یکهٔ* $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ برابر واحد است و به ترتیب در جهتهای مثبت محورهای x، y و z یک دستگاه مختصات راستگرد قرار دارند. بردار $\vec{a}$ را می‌توان برحسب بردارهای یکه به صورت زیر نوشت

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad (۳-۷)$$

که در آن $a_x\hat{i}$، $a_y\hat{j}$ و $a_z\hat{k}$ **مؤلفه‌های بردار** $\vec{a}$ و a_x، a_y و a_z **مؤلفه‌های نرده‌ای** آن هستند.

جمع برداری برحسب مؤلفه‌ها برای جمع کردن بردارها به صورت مؤلفه‌ای، از قاعده‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z \qquad (۳-۱۱ \text{ تا } ۳-۱۳)$$

که در اینجا $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی هستند که باید با هم جمع شوند و $\vec{r}$ بردار مجموع است.

ضرب یک نرده‌ای در یک بردار ضرب نرده‌ای s در بردار $\vec{v}$، بردار جدیدی است که بزرگی آن برابر با sv و جهت آن، در صورتی‌که s مثبت باشد، همان جهت $\vec{v}$ و در صورتی که s منفی باشد، مخالف جهت $\vec{v}$ است. برای تقسیم $\vec{v}$ بر s، $\vec{v}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

ضرب نرده‌ای *ضرب نرده‌ای (یا **نقطه‌ای**) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته می‌شود، یک کمیت نرده‌ای است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود*

$$\vec{a}\,.\vec{b}=ab\,\cos\,\phi \qquad (۲۰-۳)$$

که در آن ϕ زاویهٔ میان بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. ضرب‌نرده‌ای عبارت است از ضرب بزرگی یک بردار در مؤلفهٔ نرده‌ای بردار دوم در امتداد راستای بردار اول. برحسب بردارهای یکه داریم

$$\vec{a}\,.\vec{b}=(a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}}).(b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}+b_z\hat{\mathrm{k}}), \qquad (۲۲-۳)$$

که می‌شود آن را بنابر قانون توزیع‌پذیری بسط داد. توجه کنید که $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ است.

ضرب برداری **ضرب برداری** (یا **ضربدری**) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود و حاصل آن *بردار* $\vec{c}$ است که بزرگی آن با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$c=ab\sin\phi \qquad (۲۷-۳)$$

ϕ زاویهٔ کوچکتر بین جهتهای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. راستای $\vec{c}$ بر صفحهٔ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و همانگونه که در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده است با قاعدهٔ دست راست مشخص می‌شود. توجه کنید که $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ است.

برحسب بردارهای یکه داریم

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}+b_z\hat{\mathrm{k}}) \qquad (۲۹-۳)$$

که می‌توان آن را با قانون توزیع‌پذیری بسط داد.

•۱- مؤلفهٔ x بردار $\vec{A}$ برابر $-۲۵/۰\,\mathrm{m}$ و مؤلفهٔ y آن $+۴۰/۰\,\mathrm{m}$ است. (الف) بزرگی بردار $\vec{A}$ چقدر است؟ (ب) زاویهٔ میان جهت $\vec{A}$ و جهت مثبت محور x چقدر است؟ **SSM**

•۳- اگر جهت بردار $\vec{a}$ برابر با ۲۵۰° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x، و بزرگی آن $۷/۳\,\mathrm{m}$ باشد، (الف) مؤلفهٔ x و (ب) مؤلفهٔ y بردار $\vec{a}$ در صفحهٔ xy چقدر است؟ **SSM**

۴۷- بزرگی بردار $\vec{a}$ برابر ۱۰ یکا و بزرگی بردار $\vec{b}$ برابر ۶/۰ یکاست و با یکدیگر زاویهٔ ۶۰° می‌سازند. مطلوب است (الف) ضرب نرده‌ای دو بردار و (ب) بزرگی ضرب برداری $\vec{a}\times\vec{b}$. **SSM**

۵۱- یک قایق بادبانی از سمت آمریکایی *دریاچهٔ اری*[4] به سوی نقطه‌ای در سمت کانادایی آن که در فاصلهٔ $۹۰\,\mathrm{km}$ شمال سمت آمریکایی واقع است، روانه می‌شود. ولی، قایق به $۵۰\,\mathrm{km}$ شرق نقطهٔ آغاز حرکتش می‌رسد. برای آنکه قایق به مقصد اولیه‌اش بازگردد، قایقران باید (الف) چه مسافتی را و (ب) در چه جهتی بپیماید؟

۷۱- اگر بردار $\vec{B}$ با بردار $\vec{A}$ جمع شود، برایند آنها $۶/۰\hat{\mathrm{i}}+۱/۰\hat{\mathrm{j}}$ است. اگر $\vec{B}$ از $\vec{A}$ کم شود، برایند $-۴/۰\hat{\mathrm{i}}+۷/۰\hat{\mathrm{j}}$ است. بزرگی $\vec{A}$ چقدر است؟

---

[4]. Lake Erie